

## Problem A

# 磁火车的秘密

## 摘要

基于基本的电磁学模型，本文对“磁火车”的运动机理进行了有足够说服力的解释，并分析了影响磁火车速度和功率的相关参数。基于电磁感应定律、通电长直螺线管中感生磁场分布规律，我们建立了三种等效模型从不同的角度对磁火车运动现象进行解释。这些定性分析模型从不同的原理出发，但都能较好的解释这一现象。进一步基于毕奥-萨伐定律、安培磁场环路学说，通过理论推导和数值分析相结合，我们分析了通电螺线管中感生电场对磁火车施加的力。此外我们还讨论了一些可能的对磁火车运动产生影响的因素。最后，我们解释了这些因素如何影响并讨论了如何提升磁火车效率的方法。

**关键词:** 通电螺线管；磁场强度；磁场分布；Matlab 仿真

## 一、引言

仅用一节小的柱形电池，两组纽扣磁铁以及一些铜线丝可以轻松制作一辆

运动的“磁火车”。电池两端都需要与纽扣磁铁相联结（用本身磁力即可）。把这一组联结体全部放入绕制好的长直铜线圈中，松手后立即沿铜线圈轨道快速运动。如果铜线管首尾相连，磁火车就会一直不停的在圈形轨道内运动。整个运动因为磁火车持续快速在长轨道内运动令人惊异。因此，一些问题很自然地引出：这一切背后的机理是怎样的？推动磁火车运动的力究竟从哪里来？哪些因素影响着火车的运动，影响程度有多深。

这个问题在因特网上也曾引起过讨论。人们尝试不同方法来给出他们的解释，然而这些理论在科学性上是不足的。史蒂芬·艾伦在 2015 年的论文《藕级快车：一辆电磁驱动的火车》 [1]中对这一现象从安培力的角度进行了相对合理的解释和分析，但仍然缺少定量分析。

本文中，我们首先将研究聚焦在这一神奇的现象如何发生，通过分析这一小型运动系统各组成部分内在关系。基于一些基本的电磁学理论和定律，我们建立了三种模型，分别从不同的角度来解释这一现象，层层深入化、具体化。之后我们基于这些模型的思想基础，结合毕奥-萨伐定律，我们建立了定性分析模型来探究对可能对磁火车速度和功率产生影响的因素。最终，我们找到了这些因素并分析出了它们对火车运动的影响。

## 二、假设

在本文中，我们认为磁火车系统各部分构件都是理想元件。这意味着电池、强磁铁以及铜线圈的电磁特性可以得到简化从而有助于分析。

为了讨论磁火车以这样的方式运动背后的原因，我们认为运动发生在水平线性轨道上。至于其他类型的轨道（弧形、圆形等），我们认为它们可以被分成若干小的线性轨道的组合，因此这一简化对不同情形下的分析不能造成显著性的影响。

空气中，电磁场的建立时间非常接近于光速。然而磁火车的运动是宏观低速的，因此我们认为在  $dt$  时间内磁场是稳恒的，并且忽略其建立时间。除上述外，为了充分简化分析，我们忽略了其他环境因素的影响，认为实验条件是理想的。

## 三、理论与模型

### 3.1 磁火车运动的定量解释模型

牛顿第一定律告诉我们一个物体总会保持静止或匀速运动状态直到受到一个外力作用。我们的目的是弄清楚推动磁火车前进的力到底是什么并且它是如何作用在这一电磁系统上的。

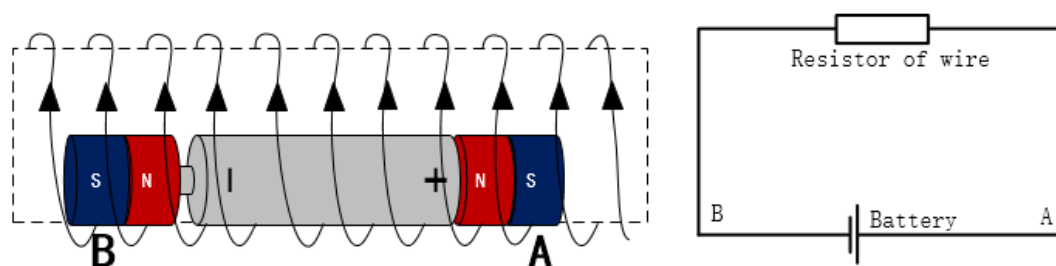


图 1.磁火车结构及其等效回路

如图 1 所示，附在电池两端两组磁铁与铜线接触，因此火车与磁铁连接成一个电流回路。电流从电池正极出发，流经右磁铁、铜线圈，最后回到电池负极。

我们选取铜线圈的一部分，并认为它是有限长的螺线管。由安培定律我们可以知道电流在螺线管中激发了电磁场。并且磁感线的大致分布情况如图 2 所示。从中我们可以看出螺线管中的磁场是均匀的、强度较大的，而其他地方的磁场是发散的、强度较弱的。

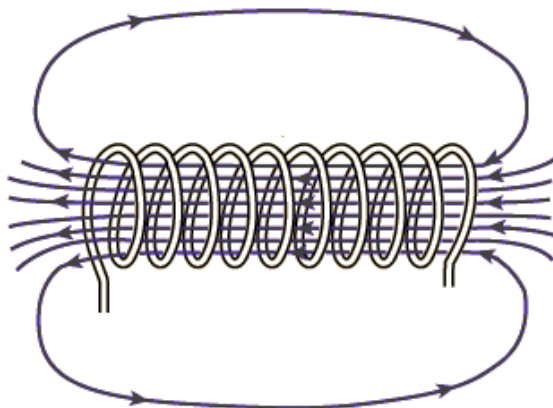


图 2.螺线管中的磁场分布

由电力激发出的磁场可以等效为一个条形磁铁。如果纽扣磁场以图 3 的方式放置，那么左侧的磁铁就会受到一个拉力，右侧的磁铁会受到推力（磁铁或电流满足同性相斥、异性相吸的规律）。因此，这一磁铁—电池连接体会向左运动。

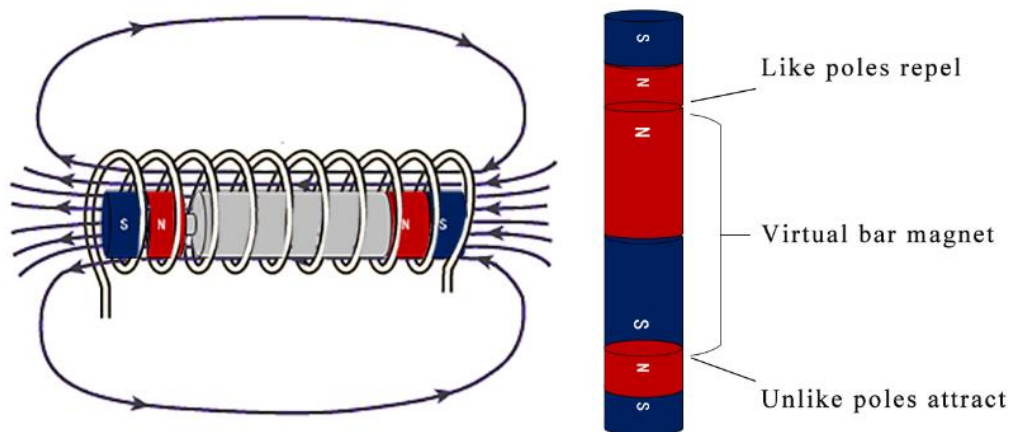


图 3. 等效条形磁铁及其对两端纽扣磁铁的作用

认为长螺线管是一个条形磁铁是一种简单的方式来解释这一运动。但是很难确定吸引力和排斥力实际上到底从哪里来、是什么性质。于是我们引入另一种等效模型进行解释。

根据安培分子电流假说[2]，每一个普通铁的磁分子可以等效为一个环形电流。磁化铁中这些分子磁矩是同方向  $\mathbf{de}$ （如图 4. a），并且相邻分子电流是反方向的（如图 4. b）。因此在磁铁里面这些分子电流互相抵消，只有表面的分子电流没有被抵消掉。磁铁可以认为是很多圈同向的表面分子电流的组合。因此，我们可以把磁铁认为是通电螺线管(如图 4. c).

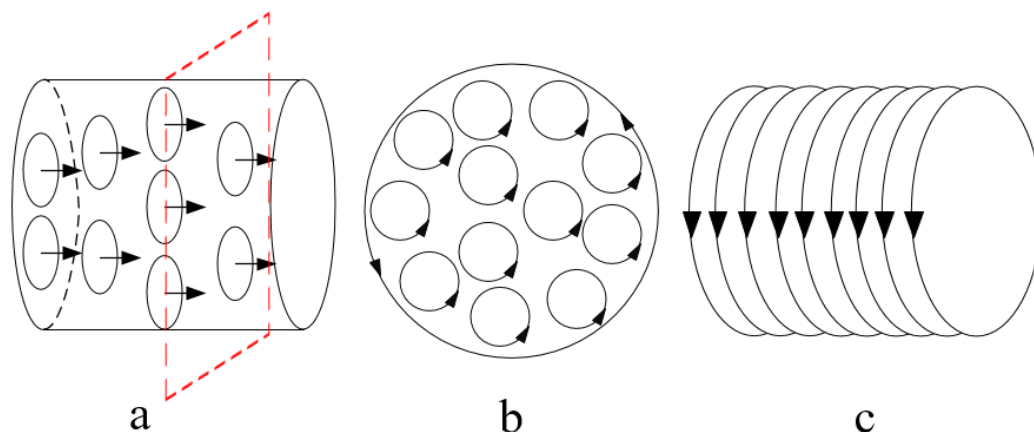


图 4. 分子电流模型及磁铁的等效模型

为了分析分子电流受到的力，我们使用 Matlab 对磁场进行了仿真（线圈匝数设为 6）。从图 5 可以看出磁感应强度的分布情况。在螺线管内，磁感线近似互相平行，在螺线管两侧，磁感线发散，与之前对条形磁铁模型中的定性分析模型比较相似的。

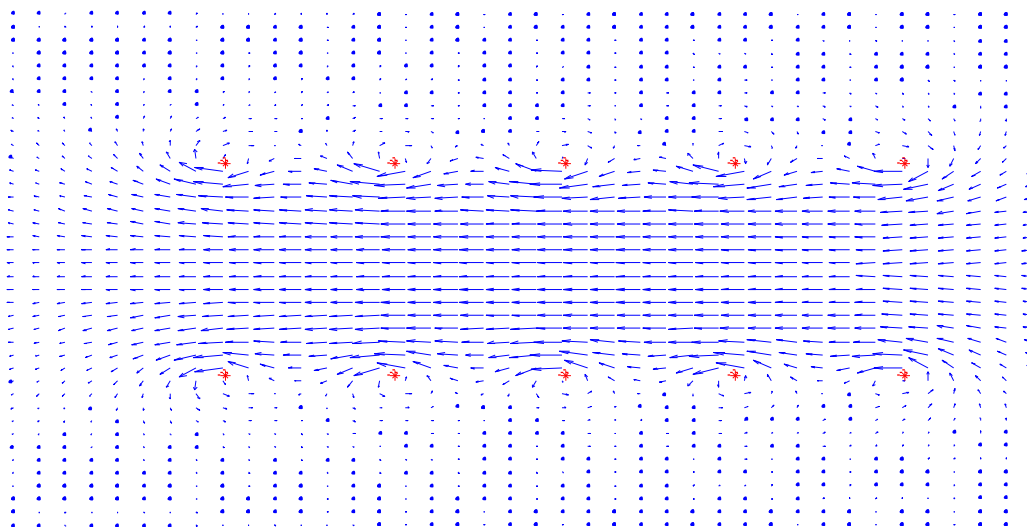


图 5. 用 Matlab 描述的磁场分布

分析过程比较清晰明了。我们分别对两个磁铁的等效螺线管模型选取一个环形电流，对其进行受力分析。如图 6 中展现的那样，对左边的环形电流取微元  $d\vec{I}_1$  处磁感应强度为  $\vec{B}_1$ ，其所受力 ( $d\vec{F}_{11} = d\vec{I}_1 \times \vec{B}_1$ ) 有一指向左侧的分量 (安培左手定则)，考虑对成性，对环形电流上所有的电流元其受力进行叠加，

环形电流所受合力向左. 对右侧的环电流进行同样的受力分析得到其所受合力向左. 因此我们得到指向左侧的两个合力  $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ . 由于两块磁铁可以分为若干环电流, 因此磁铁所受合外力指向左侧. 因此磁火车向左侧运动. 当磁火车运动时, 激发的磁场以同样的方向和速度运动. 只要火车头还在铜螺线圈中, 运动就不会停止.

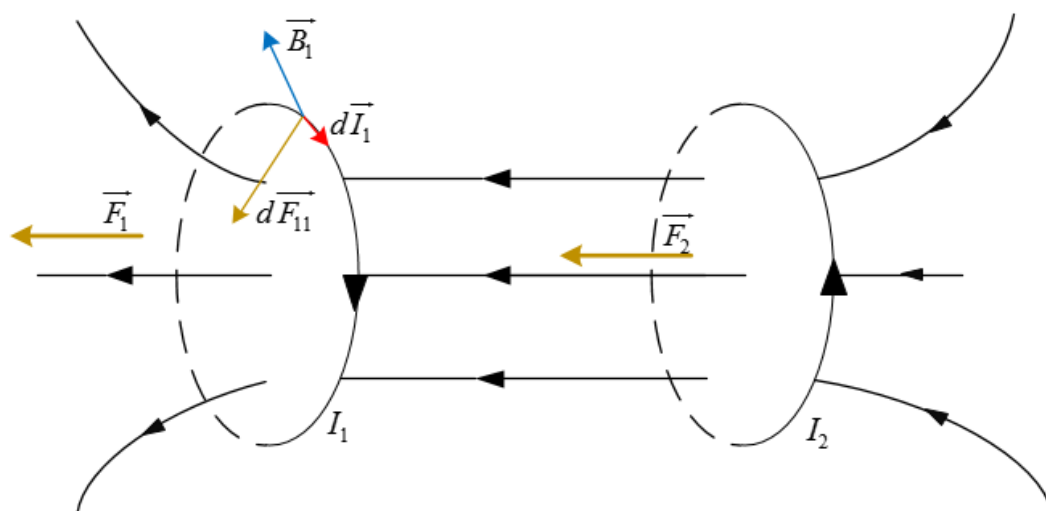


图 6. 对磁铁等效环形电流模型的受力分析

直到今日, 安培的分子电流假说还没有被证明是错的, 至少在物理实验上它一直是正确的. 然而, 将一块永磁铁分割为许多微小的电流环对很多普通人来说还很难接受. 这里我们引入另外一种既通俗易懂又不失科学性的模型, 不从微观视角讨论这些分子电流而能解释力的来源问题.

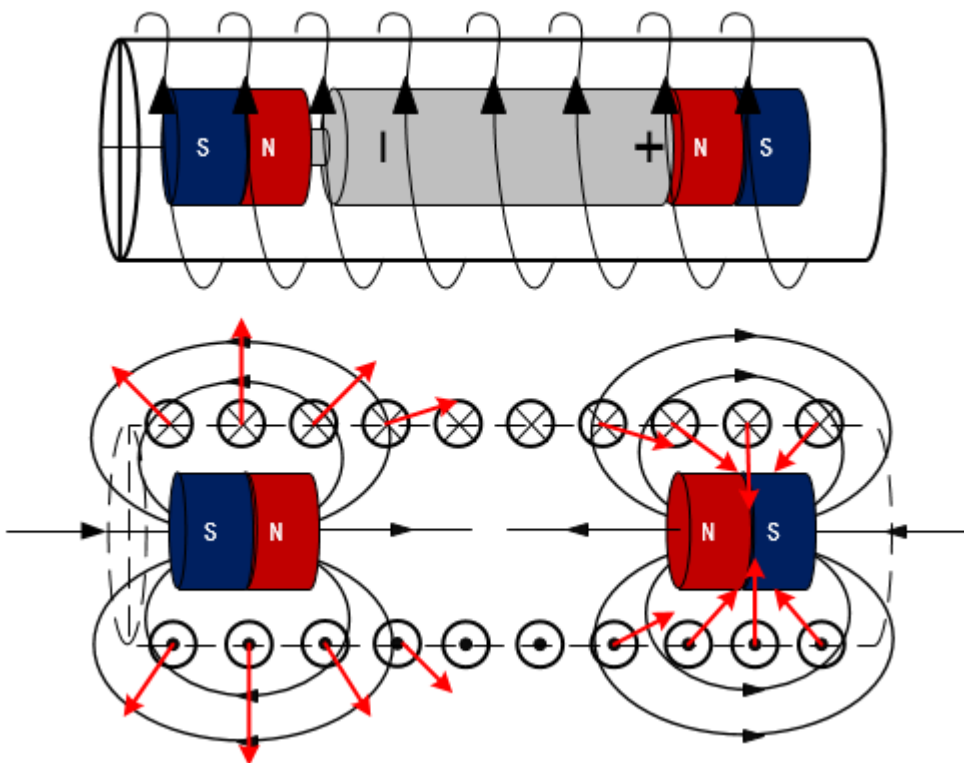


图.7 图6. 对磁铁等效环形电流模型的受力分析

如图7所示，我们移去干电池，把有限长通电螺线管作为我们的研究对象，螺线管在两组纽扣磁场中，我们画出磁感线的大致分布情况，并且对铜线进行了受力分析。结果很清楚的显示铜线所受的合外力指向和右侧。依据牛顿第三定律，两个物体间的作用力与反作用力大小相等、方向相反[4]，因此螺线管中被激发的磁场对纽扣磁施加的力指向左侧，也就是磁火车运动的方向。

### 3.2 磁火车运动的定量分析模型

我们选取铜线圈包含磁火车联结体的一部分作为研究对象（如图8）。

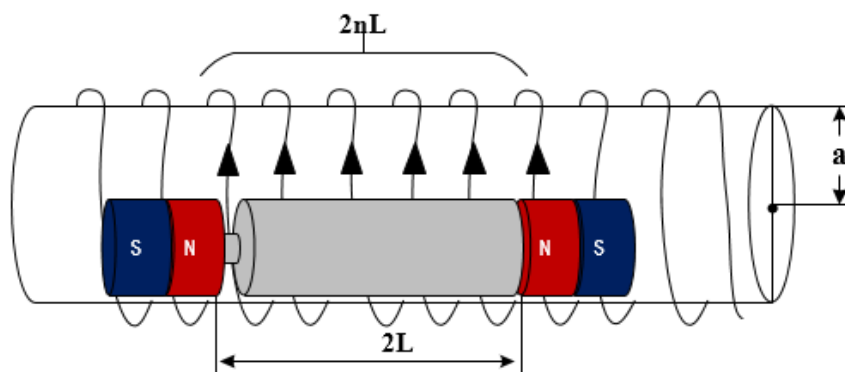


图 8. 螺线管的一部分

前面提到，两节磁铁需要与铜线相连来形成一个电流回路。线圈的总长为

$$L_{\text{wire}} = 4\pi anL$$

这里  $R$  是螺线管半径， $n$  是单位长度的线圈匝数， $2L$  是螺线管的匝数

于是线圈的电阻为

$$R_{\text{wire}} = \frac{1}{\sigma L_{\text{wire}}}$$

式中  $\sigma$  是铜线的电导率 ( $5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ).

于是回路电流可以表示为

$$I = \frac{E}{R_{\text{wire}}} = \sigma L_{\text{wire}} E = 4n\pi\sigma aLE$$

式中  $E$  为电池电动势。

之后我们考虑感生电场分布：

由毕奥-萨伐尔定律， $\vec{r}'$  处电流元  $I'd\vec{l}'$  在  $\vec{r}$  点对磁场的贡献为

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'd\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

式中  $\mu_0$  为真空中的磁导率 ( $\text{N/A}^2$ )， $\vec{r}$  是由电流元指向磁场任一点的矢量。

如果电流元在原点出 ( $\vec{r}' = 0$ )，则有

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'd\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}$$

考虑如图放置的螺线管磁场 (如图 9)，由螺线管的对称性，只需  $xoz$  平面的磁场分布即可类比到全空间。



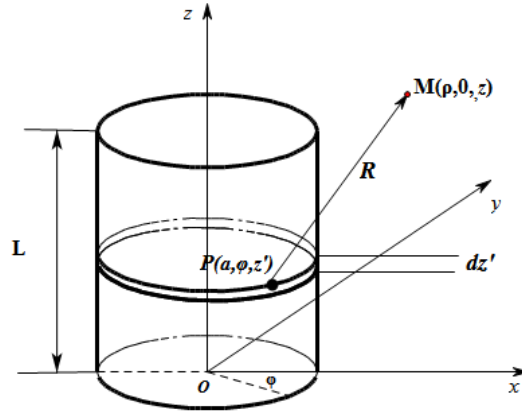


图 9. 基于柱坐标系的几何分析

在  $z$  轴上  $z$  处取厚  $dz$  的环，则圆环电流为  $I' = nI dz$ ，电流元  $I' d\vec{l}'$  在该圆环上，在柱坐标系中，位于  $P(a, \varphi, z')$ ，在柱坐标系中，取空间中一点  $M(\rho, 0, z)$  由图中的几何关系

$$d\vec{l}' = \hat{\varphi} a d\varphi = a d\varphi (-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi}$$

可以得出矢量磁位

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I' d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a(-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi)}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi}} d\varphi$$

其中：

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\hat{x} \sin \varphi}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi}} d\varphi = \hat{x} \frac{-1}{a\rho} \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi} \Big|_{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho}^{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho} = 0$$

因此

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I' a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \hat{y} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi}} d\varphi$$

在柱坐标系中，对于  $\hat{y} = \hat{\varphi}$ ，即：

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I' a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi}} d\varphi = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I' a}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi}} d\varphi$$

不妨令  $R^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi$ ，再对  $dz'$  求积分，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \int_0^\pi \ln \frac{\sqrt{(z+L)^2 + R^2} + z + L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2} + z - L} \cos \varphi d\varphi \\ B_\rho = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} \right] d\varphi \\ B_z = \frac{A}{\rho} + \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(a \cos \varphi - \rho)}{R^2} \left[ \frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right] \cos \varphi d\varphi \end{array} \right.$$

由文献[5]中对 A 的变形, 可得

$$A = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \rho \cos^2 \varphi}{R^2} \left[ \frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right] d\varphi$$

由此可知螺线管中任意一点  $M(\rho, 0, z)$  的磁感应强度

$$\left\{ \begin{array}{l} B_\rho = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} \right] d\varphi \\ B_z = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a - \rho \cos \varphi}{R^2} \left[ \frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right] d\varphi \end{array} \right.$$

此处我们采用数值计算的方法求磁感应的积分, 为了减少被积函数的计算次数并保证足够精度, 可用高代数精度的复合高斯求积公式[6].

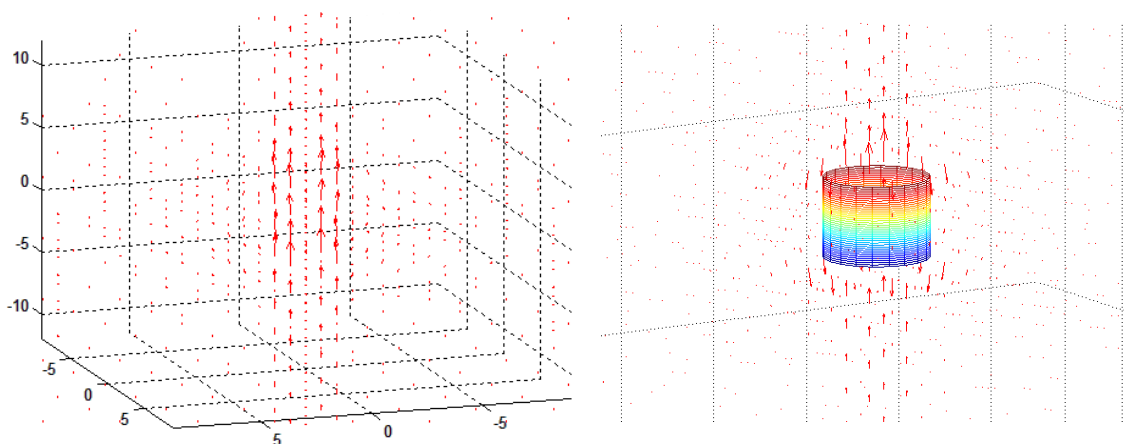


图 10. 磁感应强度分布 (三维矢量表达)

积分的结果可以从图 10 中体现出来。在右侧的图中, 彩色的柱体代表螺线管, 红色的向量代表磁感应。

用数学方法解出磁场的分布后，我们可以继续计算小磁铁受到来自磁场的力：

$$d\vec{F}_m = X_0 \vec{H} \nabla \cdot \vec{H} dm \approx \frac{X_0 \nabla \cdot \vec{B}}{\mu_0^2} \vec{B} dm$$

在这个公式中， $X_0$  是磁化率 ( $\text{m}^3/\text{kg}$ ), 表示单位质量的矿石颗粒受到的力从一个单位大小的外磁场中。 $M$  是质量(kg).

质量密度是  $dm = \delta dV$ . 故两个小磁铁受到磁场的动力（一个推力，一个拉力）是：

$$\vec{F}_m = \int_{2V} d\vec{F} = \int_{2V} \frac{X_0 \nabla \cdot \vec{B}}{\mu_0^2} \vec{B} \delta dV$$

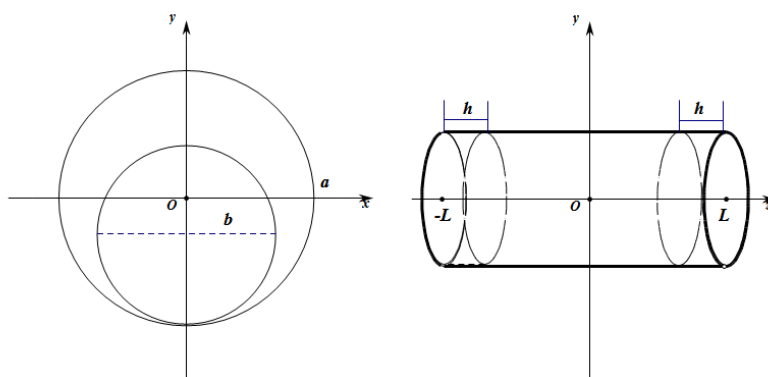


图 11. 对合力进行积分的区域

纽扣磁铁和电池在螺线管中的位置可以从图中看出 (图 11)

$$(x - a + b)^2 + y^2 \leq b^2 (L \leq z \leq L + h, -L + h \leq z \leq -L)$$

考虑摩擦力，我们可以得到小车所受到的合力为

$$\vec{F} = \vec{F}_m - \eta S = \int_{2V} \frac{X_0 \nabla \cdot \vec{B}}{\mu_0^2} \vec{B} \delta dV - \eta S$$

此处  $\eta$  是摩擦因数.  $S$  是接触面积。

根据能量守恒定律，可得

$$E = E_k + E_m + E_e = E_{e0}$$

$E_k$  是小火车的动能， $E_m$  是系统的磁场能量， $E_e$  是干电池的剩余能量。 $E_{e0}$  是电池最初储存的能量。

以小火车整体作为研究对象，则它的总能量  $E_c = E_k + E_e$ 。

所以可得

$$P_c = \frac{dE_c}{dt} = -\eta mgv + P_e - I^2 R = -\eta mg \frac{P_c}{F} + P_e - I^2 R$$

这里  $F$  是这个系统受到的合力。 $P_e$  是电池电流输出的功率。

由此可得

$$P_c = \frac{F(P_e - I^2 R)}{\eta mg}, \quad v = \frac{P_c}{F} = \frac{(P_e - I^2 R)}{\eta mg}$$

## 四、结果与讨论

与我们前面看到的公式一样，短时间内， $P_e$  和  $I$  保持着一样的大小在初的时候，但是随着时间增长，电量逐渐下降 (如图 12 所示) [7]，以速度会变慢。

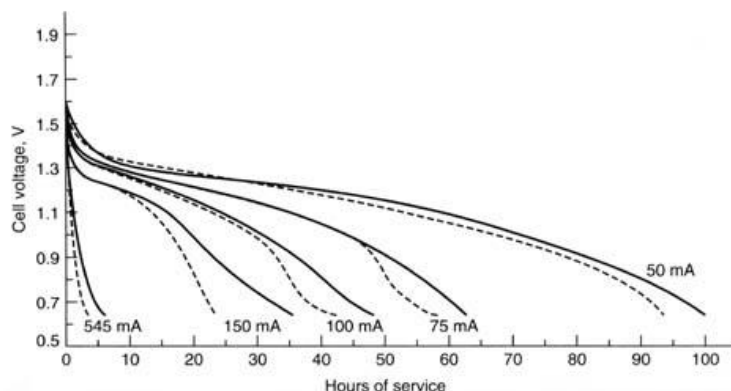


图 12.不同种电池的电压随时间的衰减曲线

除此之外，摩擦力也是一个直接影响因素。在那个运动设备里，两个纽扣磁铁直接与铜线相连构成回路。尽管二者都很光滑，摩擦力依旧不能被忽略。

小火车的动力系统由以下因素影响：电磁，摩擦系数，系统本身质量，电磁驱动力等。正如我们刚刚计算的，阻力是由纽扣电池的厚度，铜线长度等因素决定额。

以构成回路的铜线长度作为研究对象，我们计算了不同条件下的阻力大小。从图 13 中，我们可以看出，在电池长度不变的情况下，阻力大致随着线长的增加而增加。

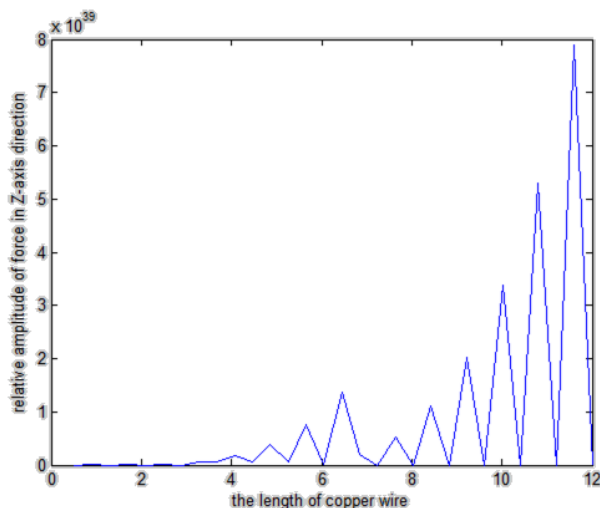


图 13.铜线长度对合力的影响

从理论推导和数值模拟的结果中我们可以得出的一系列结论。与纽扣电池作用的电磁场是由电流激发的。而电池是小火车的能量源泉。尽管永动机早已被证明是不可能的，但我们仍然希望做出一些提高机械效率的努力。在这个小系统中，减少阻力和摩擦就意味着提升效率。具体方法有很多，比如减小接触面积或者使用表面更光滑的纽扣磁铁和铜线，除此之外使用磁化率更高的磁铁也可以提高效率。

## 五、优缺点分析

### 5.1 优点

我们建立了三种合理的定性模型去解释电磁小火车的工作原理。所有模型都是建立在最基本的电磁理论之上，虚拟条形磁铁的模型将长螺线管视作一个条形磁铁。该模型容易解释和理解，但是在小火车受到的引力阻力来源问题上没有详细的解释。为了更有说服力，我们在安培分子电流假说的基础上从微观角度进行了分析。在具体分析力的过程中，我们找出了影响推力和拉力的因素并给出了图形描述。

在考虑影响小火车的速度和功率的因素上，我们尝试建立了定量模型，导出各种参数得到计算火车的速度和功率的公式。

### 5.2 缺点

在计算速度和功率的时候，我们定义了一些变量并使用了一些常数，他们

对于模型稳定性的影响是未知的。换句话说，变量对模型的影响可能受到我们定义的常量值得影响。

同时，作为由于传统的积分分析本身的局限性，我们没有得到最终的解析解作为最终答案。所以我们使用数值分析的方法去量化分析相关参数以及它们对速度和功率的影响。在这种情况下，传统的数学方法显现了它们的局限性。我们需要学习更加科学的分析方法并使用软件仿真，比如 Maxwell, COMSOL Multiphysics, 等.

除此之外，在分析各个因素度火车运动的影响时，我们只是对他们的影响进行了单独分析，没有做到对它们的内在联系进行分析。

## 六、参考文献

- [1] Stephen Irons. The dipolar express: An electromagnetically driven train. The Physics Teacher :53, 186 (2015); doi: 10.1119/1.4908095.
- [2] Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Andr%C3%A9-Marie\\_Amp%C3%A8re](https://en.wikipedia.org/wiki/Andr%C3%A9-Marie_Amp%C3%A8re)
- [3] Zhu Wei-juan1, Kong Xiang-kun. The Simulation Experiment of Magnetic Field Intensity Produced by Solenoid——The Application of MATLAB to Physical Teaching. Computer Knowledge and Technology, 16(2017): P.119.
- [4] Wikipedia:[https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's\\_laws\\_of\\_motion#Newton.27s\\_third\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_laws_of_motion#Newton.27s_third_law)
- [5] Liu Yao-kang. The numerical solution of magnet in solenoid. Journal of Science of Teachers' College and University,18(2008):P.61
- [6] Weisstein, Eric W. "Gaussian Quadrature." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GaussianQuadrature.html>
- [7] Figure: <http://www.sithtech.net/photographyzto/Lithium-vs-Alkaline-Battery-Life.html>

## 附录

Matlab code:

---

```
% Describe the magnetic distribution in solenoid
clear
rh=2.5;i0=10;mu0=4*pi*1e-7;n=10 %set a series of parameters
```

---

---

```
m=(n+1)/2
xmax=6;ymax=6;ngrid=40;
cx(1:ngrid,1:ngrid)=zeros;cy(1:ngrid,1:ngrid)=zeros;
c0=mu0/4*pi;
nh=20;
ngrid1=nh+1;
xmax1=0;
ymax1=2*pi;
xplot=linspace(- xmax,ymax,ngrid); %set the 2-dimensions grid
yplot=linspace(- xmax,ymax,ngrid);
theta0=linspace(0,2*pi,21);
theta1=theta0(1:nh);
y1=rh*cos(theta1);
z1=rh*sin(theta1);
theta2=theta0(2:nh+1);
y2=rh*cos(theta2);
z2=rh*sin(theta2);
dlx=0;dly=y2- y1;dlz=z2- z1;
xc=[- (n- 1)/2:2:(n- 1)/2];yc=(y2+y1)/2;zc=(z2+z1)/2;
for k=1:m
for i=1:ngrid
for j=1:ngrid
rx=xplot(j)- xc(k); %to calculate every grid point to the
current element in x direction
ry=yplot(i)- yc;
rz=0- zc;
r3=sqrt(rx.^2+ry.^2+rz.^2).^3;
dlxr_x=dly.*rz- dlz.*ry;
dlxr_y=dlz.*rx- dlx.*rz;
bx(i,j)=sum(c0*i0*dlxr_x./r3); by(i,j)=sum(c0*i0*dlxr_y./r3);
end
end
cx(1:ngrid,1:ngrid)=cx(1:ngrid,1:ngrid)+bx(1:ngrid,1:ngrid);
cy(1:ngrid,1:ngrid)=cy(1:ngrid,1:ngrid)+by(1:ngrid,1:ngrid);
end
quiver(xplot,yplot,cx,cy); %to describe the vector field
plot(xc,rh,' r*' )
hold on
plot(xc,- rh,' r*' )
```

---

---

```

clear;clc
%I = U/(2*pi*a);
mu0 = 4*pi*1e-7;
I = 1; %
n = 1; %
a = 0.5; %
L = 1; %

C = mu0*n*I*a/2/pi; %

xmax=9;
ymax=9;
zmax=20;
ngrid=50;
x=linspace(- xmax,xmax,ngrid); %
y=linspace(- ymax,ymax,ngrid);
z=linspace(- zmax,zmax,ngrid);

fai = linspace(0,pi,40);
cx=zeros(ngrid,ngrid,ngrid);%
cy=zeros(ngrid,ngrid,ngrid);
cz=zeros(ngrid,ngrid,ngrid);

b = 10^10; %

for i=1:ngrid %
    for j=1:ngrid
        for k=1:ngrid
            rou = sqrt( x(i)^2 + y(j)^2 );
            Bp = C*sum( cos(fai).* ( 1./sqrt( (z(k)-L)^2+rou^2+a^2-2*a*rou*cos(fai) ) -
1./sqrt( (z(k)+L)^2+rou^2+a^2-2*a*rou*cos(fai) ) ) );
            Bx = Bp*x(i)/rou;
            By = Bp*y(j)/rou;
            Bz = C*sum( ( (a-rou*cos(fai))./ (rou^2+a^2-2*a*rou*cos(fai)) ) .* ...
( (z(k)+L)./sqrt( (z(k)-L)^2+rou^2+a^2-2*a*rou*cos(fai) ) - (z(k)-L)./sqrt( (z(k)+L)^2+rou^2+a^2-2*a*rou*cos(fai) ) ) );

            cx(i,j,k) = b*Bx ;
            cy(i,j,k) = b*By ;
            cz(i,j,k) = b*Bz ;
        end
    end
end

```

---



```
end
end

[xplot,yplot,zplot] = ndgrid(linspace(-zmax,zmax,ngrid));
scale =1;
quiver3(xplot,yplot,zplot,cx,cy,cz,scale,'r');
axis([-xmax xmax -ymax ymax -12 12 ])
view([40,120,40]);
% view([0,90,90]);
hold on

[r,zz]=ndgrid((0:.05:1)*2*pi,-1:.05:1);
x=cos(r);
y=sin(r);
h1=mesh(x,y,zz);

x0 = 0.0001;
density = 1;
h = 0.3;
b = 0.25;

div = divergence(cx,cy,cz);
Fz = density*x0*div/mu0^2.* cz;

F = 0;
for i=1:ngrid
    for j=1:ngrid
        for k=1:ngrid
            if (L<=z(k)&& z(k)<=(L+h)) || ((-L+h)<=z(k)&& z(k)<=-L)
                if ((x(i)-a+b)^2 + y(j)^2) <= b^2
                    %cz(i,j,k)
                    F = F+ abs(Fz(i,j,k));
                end
            end
        end
    end
end
end
```

---